UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Dept. Computación y Tecnología de la Información
Estructuras Discretas II
CI 2526
Mayo-Julio 2021

Práctica 7
Soluciones
Gustavo Lau
2021-07-04

Definiciones

Relación reflexiva.

$$R \text{ es reflexiva en } A \equiv \forall a \in A\ ((a,a) \in R)$$

Clausura reflexiva r(R). Dada una relación R de A en A, se define la clausura reflexiva de R como la menor relación reflexiva de A en A que contiene a R. Equivalentemente, la clausura reflexiva de R, $r(R)$, se define como la relación de A en A que satisface las siguientes propiedades:

(i) $r(R)$ es reflexiva

(ii) $R \subseteq r(R)$

(iii) Si R' es reflexiva y $R \subseteq R'$ entonces $r(R) \subseteq R'$

Relación simétrica.

$$R \text{ es simétrica en } A \equiv \forall a,b \in A\ ((a,b) \in R \implies (b,a) \in R)$$

Clausura simétrica s(R). Dada una relación R de A en A, se define la clausura simétrica de R como la menor relación simétrica de A en A que contiene a R. Equivalentemente, la clausura simétrica de R, $s(R)$, se define como la relación de A en A que satisface las siguientes propiedades:

(i) $s(R)$ es simétrica

(ii) $R \subseteq s(R)$

(iii) Si R' es simétrica y $R \subseteq R'$ entonces $s(R) \subseteq R'$

Relación transitiva.

$$R \text{ es transitiva en } A \equiv \forall a,b,c \in A\ ((a,b) \in R \wedge (b,c) \in R \implies (a,c) \in R)$$

Clausura transitiva t(R). Dada una relación R de A en A, se define la clausura transitiva de R como la menor relación transitiva de A en A que contiene a R. Equivalentemente, la clausura transitiva de R, $t(R)$, se define como la relación de A en A que satisface las siguientes propiedades:

(i) $t(R)$ es transitiva

(ii) $R \subseteq t(R)$

(iii) Si R' es transitiva y $R \subseteq R'$ entonces $t(R) \subseteq R'$

Relación Identidad de A. Dado un conjunto A se define la relación Identidad de A como

$$Id_A = \{(x,x) : x \in A\}$$

1. Sea R una relación binaria sobre A. Demuestre

$$r(R) = R \cup Id_A$$

Respuesta

Sugiero ver https://www.math24.net/closures-relations

Ejercicio fácil: probar que $R \cup Id_A$ es reflexiva en A.

Por doble contención.

Como $R \cup Id_A$ es reflexiva y $R \subseteq R \cup Id_A$, por (iii), tenemos que $r(R) \subseteq R \cup Id_A$.

Por otra parte, por (i), $r(R)$ es reflexiva lo cual implica que $Id_A \subseteq r(R)$ y, por (ii), $R \subseteq r(R)$. Por lo tanto, $R \cup Id_A \subseteq r(R)$.

$\therefore r(R) = R \cup Id_A$ ■

2. Sea R una relación binaria sobre A. Demuestre

$$s(R) = R \cup R^{-1}$$

Respuesta

Ejercicio fácil: probar que $R \cup R^{-1}$ es simétrica.

Por doble contención.

Como $R \cup R^{-1}$ es simétrica y $R \subseteq R \cup R^{-1}$, por (iii), tenemos que $s(R) \subseteq R \cup R^{-1}$.

Por otra parte, si $(x,y) \in R \cup R^{-1}$ hay dos posibilidades: $(x,y) \in R$ o $(x,y) \in R^{-1}$.

Si $(x,y) \in R$, por (ii), tenemos que $(x,y) \in s(R)$.

Si $(x,y) \in R^{-1}$ entonces $(y,x) \in R$ y, por (ii), $(y,x) \in s(R)$. Como $s(R)$ es simétrica tenemos que $(x,y) \in s(R)$.

Como en ambos casos $(x,y) \in s(R)$ concluimos que $R \cup R^{-1} \subseteq s(R)$.

$\therefore s(R) = R \cup R^{-1}$ ■

3. Sea R una relación binaria sobre A. Demuestre

$$t(R) = \bigcup_{i \geq 1} R^i$$

Respuesta

Ejemplo:

A = todas las personas en el mundo

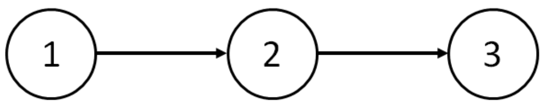
$(x, y) \in R$ significa x conoce a y

https://es.wikipedia.org/wiki/Seis_grados_de_separación

Otro ejemplo: https://en.wikipedia.org/wiki/Erdós_number

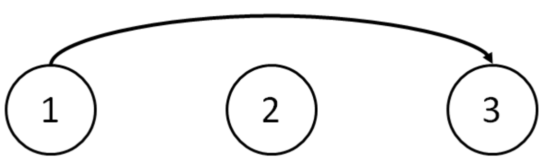
Viendo la relación R como un grafo dirigido:

R son los pares (a, b) tales que hay un camino de longitud 1 desde a hasta b en R.



$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R^2 son los pares (a, b) tales que hay un camino de longitud 2 desde a hasta b en R.



$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R^3 son los pares (a, b) tales que hay un camino de longitud 3 desde a hasta b en R.

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

R^i son los pares (a, b) tales que hay un camino de longitud i desde a hasta b en R.

La relación $\bigcup_{i \geq 1} R^i$ se conoce como la relación de conectividad: Sea R una relación en un conjunto A. La relación de conectividad R^* consta de los pares (a, b) tales que hay un camino de longitud al menos uno desde a hasta b en R.

Esto da la intuición de que la clausura transitiva de R es la relación de conectividad R^*.

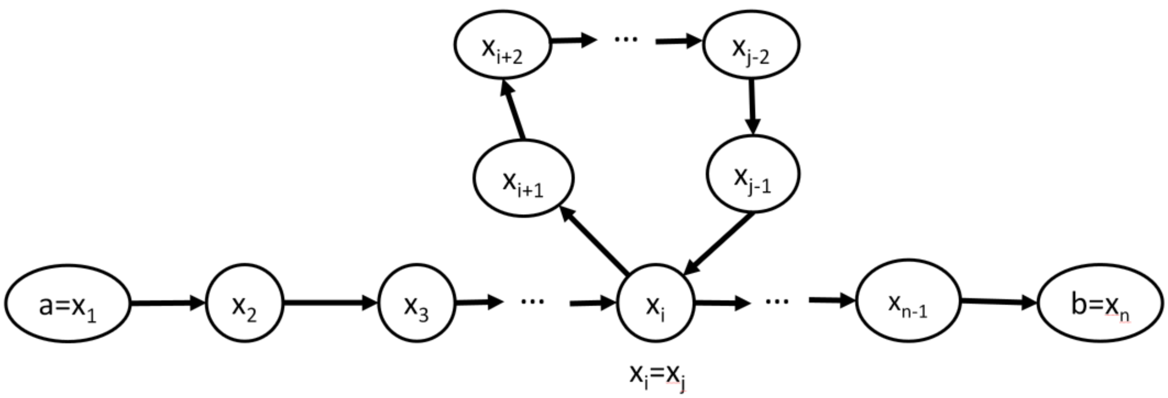
Ver la demostración formal en las páginas 78 y 79 del libro del profesor Yriarte.

4. Demuestre que si R es una relación binaria sobre un conjunto de n elementos, entonces

$$t(R) = \bigcup_{i=1}^{n-1} R^i$$

Respuesta

Dado el resultado de la pregunta anterior, solamente hace falta demostrar que si el conjunto base de la relación R tiene n elementos y en el grafo de la relación hay un camino de un nodo, llamémoslo a, a otro, llamémoslo b, entonces hay un camino de a a b de longitud a lo sumo $n-1$. Si hay un camino de longitud mayor a $n-1$ entonces el camino pasa por más de n nodos y por el principio del palomar, ver https://es.wikipedia.org/wiki/Principio_del_palomar, un nodo debe de aparecer dos veces en el camino, llamémoslo x_i:



Entonces, como indica el diagrama, hay un ciclo en el camino que pasa por x_i y se puede conseguir un camino más corto quitando dicho ciclo del camino. Con ello se consigue un camino de a a b de longitud a lo sumo $n-1$.

5. Sean R y S relaciones sobre A tales que $R \subseteq S$. Demuestre que:

$$r(R) \subseteq r(S)$$

Respuesta

$$\begin{aligned}
& r(R) \\
= \quad & \langle \text{Pregunta 1 de esta práctica} \rangle \\
& R \cup Id_A \\
\subseteq \; & \langle R \subseteq S \rangle \\
& S \cup Id_A \\
= \quad & \langle \text{Pregunta 1 de esta práctica} \rangle \\
& r(S)
\end{aligned}$$

6. Sean R y S relaciones sobre A tales que $R \subseteq S$. Demuestre que:

$$s(R) \subseteq s(S)$$

Respuesta

$$\begin{array}{ll} & s(R) \\ = & \langle \text{Pregunta 2 de esta práctica} \rangle \\ & R \cup R^{-1} \\ \subseteq & \langle R \subseteq S \rangle \\ & S \cup S^{-1} \\ = & \langle \text{Pregunta 2 de esta práctica} \rangle \\ & s(S) \end{array}$$

7. Sean R y S relaciones sobre A tales que $R \subseteq S$. Demuestre que:

$$t(R) \subseteq t(S)$$

Respuesta

$$\begin{array}{ll} & t(R) \\ = & \langle \text{Pregunta 3 de esta práctica} \rangle \\ & \bigcup_{i \geq 1} R^i \\ \subseteq & \langle R \subseteq S \rangle \\ & \bigcup_{i \geq 1} S^i \\ = & \langle \text{Pregunta 3 de esta práctica} \rangle \\ & t(S) \end{array}$$

8. Construya la matriz asociada de la relación

$$R_1 = \{(1,1),(1,2),(2,3),(4,4),(4,1)\}$$

sobre $A = \{1,2,3,4\}$ y a partir de ella determine si R_1 es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva. Halle las potencias de R_1, y a partir de ellas halle su clausura transitiva.

Respuesta

Página 95 del libro del profesor Yriarte:

Teorema 5.8 *Si R es una relación sobre A, A tiene n elementos y M es la matriz asociada a R, entonces*

1. *R es reflexiva si y sólo si $I_n \leq M$*
2. *R es simétrica si y sólo si $M = M^t$*
3. *R es antisimétrica si y sólo si $M \wedge M^t \leq I_n$*
4. *R es transitiva si y sólo si $M^2 \leq M$*

También se puede usar la matriz asociada a una relación para hallar sus clausuras reflexiva, simétrica y transitiva. Ello se formaliza en el siguiente teorema.

Teorema 5.9 *Si R es una relación sobre A, A tiene n elementos y M_R es la matriz asociada a R, entonces las matrices asociadas a las clausuras se hallan como sigue:*

1. *Reflexiva: $M_{r(R)} = I_n \vee M_R$*
2. *Simétrica: $M_{s(R)} = M_R \vee M_R^t$*
3. *Transitiva: $M_{t(R)} = \bigvee_{i=1}^{n-1} M_R^i$*

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R_1 no es reflexiva ya que la diagonal de M contiene ceros.

R_1 no es simétrica pues M no es igual a su tranpuesta M^t:

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M \wedge M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R_1 es antisimétrica ya que $M \wedge M^t \leq I_n$.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R_1 no es transitiva ya que $M^2 \nleq M$.

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$M^4 = M^3$

Por lo tanto $M_{t(R)} = \bigvee_{i=1}^{n-1} M^i = M \vee M^2 \vee M^3$,

$$M_{t(R)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$t(R) = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,3),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\}$$

9. Construya la matriz asociada de la relación

$$R_2 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(1,2),(2,1),(4,3),(3,4),(2,4),(4,2)\}$$

sobre $A = \{1,2,3,4\}$ y a partir de ella determine si R_2 es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva. Halle las potencias de R_2, y a partir de ellas halle su clausura transitiva.

Respuesta

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

R_2 es reflexiva ya que la diagonal de M solo tiene unos.

R_2 es simétrica ya que M es igual a su tranpuesta M^t.

Como $M = M^t$ tenemos que $M \wedge M^t = M$. R_2 no es antisimétrica ya que $M \wedge M^t \nleq I_n$.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

R_2 no es transitiva ya que $M^2 \nleq M$. Se puede ir de 1 a 2 y de 2 a 4 pero no directamente de 1 a 4.

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$M^4 = M^3$

Por lo tanto $M_{t(R)} = \bigvee_{i=1}^{n-1} M^i = M \vee M^2 \vee M^3$,

$$M_{t(R)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{aligned} t(R) = A \times A = \{&(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),\\ &(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,2),(4,3),(4,4)\} \end{aligned}$$

10. Construya la matriz asociada de la relación

$$R_3 = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(4,1),(3,2),(2,3),(2,4)\}$$

sobre $A = \{1,2,3,4\}$ y a partir de ella determine si R_3 es reflexiva, simétrica, antisimétrica o transitiva. Halle las potencias de R_3, y a partir de ellas halle su clausura transitiva.

Respuesta

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R_3 es reflexiva ya que la diagonal de M solo tiene unos.

$$M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R_3 no es simétrica pues M no es igual a su tranpuesta M^t

$$M \wedge M^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R_3 no es antisimétrica ya que $M \wedge M^t \nleq I_n$ (2,3)y (3,2) están en R_3.

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

R_3 no es transitiva ya que$M^2 \nleq M$ Se puede ir de 2 a 4 y de 4 a 1 pero no directamente de 2 a 1.

$$M^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M^4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$M^4 = M^3$

Por lo tanto $M_{t(R)} = \bigvee_{i=1}^{n-1} M^i = M \vee M^2 \vee M^3$

$$M_{t(R)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y

$$t(R) = \{(1,1),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(4,1),(4,4)\}$$

11. Demuestre o de un contraejemplo de la siguiente afirmación:

$$r(R_1 \cup R_2) = r(R_1) \cup r(R_2)$$

Respuesta

Demostración:

$$\begin{array}{ll} & r(R_1 \cup R_2) \\ = & \langle \text{Pregunta 1 de esta práctica} \rangle \\ & R_1 \cup R_2 \cup Id_A \\ = & \langle \text{Propiedades de la unión} \rangle \\ & R_1 \cup Id_A \cup R_2 \cup Id_A \\ = & \langle \text{Pregunta 1 de esta práctica} \rangle \\ & r(R_1) \cup r(R_2) \end{array}$$

12. Demuestre o de un contraejemplo de la siguiente afirmación:

$$s(R_1 \cap R_2) = s(R_1) \cap s(R_2)$$

Respuesta

Contraejemplo:

$$\begin{aligned} A &= \{a, b\} \\ R_1 &= \{(a, b)\} \\ R_2 &= \{(b, a)\} \\ R_1 \cap R_2 &= \varnothing \\ s(R_1 \cap R_2) &= \varnothing \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s(R_1) &= \{(a, b), (b, a)\} \\ s(R_2) &= \{(a, b), (b, a)\} \\ s(R_1) \cap s(R_2) &= \{(a, b), (b, a)\} \end{aligned}$$

$$s(R_1 \cap R_2) \neq s(R_1) \cap s(R_2)$$

13. Demuestre o de un contraejemplo de la siguiente afirmación:

$$t(R_1 \cup R_2) = t(R_1) \cup t(R_2)$$

Respuesta

Contraejemplo:

$$\begin{aligned}
A &= \{a, b, c\} \\
R_1 &= \{(a, b)\} \\
R_2 &= \{(b, c)\} \\
R_1 \cup R_2 &= \{(a, b), (b, c)\} \\
t(R_1 \cup R_2) &= \{(a, b), (b, c), (a, c)\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
t(R_1) &= \{(a, b)\} \\
t(R_2) &= \{(b, c)\} \\
t(R_1) \cup t(R_2) &= \{(a, b), (b, c)\}
\end{aligned}$$

$$t(R_1 \cup R_2) \neq t(R_1) \cup t(R_2)$$